

Einleitung

Die Entwicklung der Reliefparameter Knotenstreuung und Relieffaktor war nicht nur für die Morphometrie von bahnbrechender Bedeutung¹, sondern muß auch als einer der ersten Beiträge zur modernen, mathematisch orientierten regionalen Geographie angesehen werden. Hier wurde nun das Landschaftselement Relief eindeutig quantitativ erfaßt. In den letzten Jahren stehen nun auch die elektronischen Rechenanlagen dem Geographen als Hilfsmittel zu Verfügung², und das Ziel dieses Beitrages ist die Transformation der in *Gassmann und Gutersohn* (1947) eingeführten Reliefintegrale in numerische Annäherungen, die sich zur Computerbearbeitung eignen.

1. Das hypsometrische Polynom

Die Geländeoberfläche eines Reliefabschnittes der Grundfläche F_0 sei zunächst als Funktion $Z(x, y)$ dargestellt; d. h. für jedes Koordinatenpaar (x_i, y_i) ist die entsprechende Kote gleich $Z(x_i, y_i)$. Das Volumen des Geländeabschnittes ist damit³

$$V = \int \int^{F_0} Z(x, y) \, dx dy \quad (1.1)$$

und die mittlere Kote z_m :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \, du = \int_{-\infty}^0 f(u) \, du + \int_0^1 f(u) \, du + \int_1^{\infty} f(u) \, du = \int_0^1 f(u) \, du = 1 \quad (1.6)$$

Der Vorteil dieser Interpretation liegt darin, daß die mittlere Kote z_m direkt aus dem ersten Moment, die Knotenstreuung σ aus dem zweiten Moment der

Nun ist aber die Funktion $Z(x, y)$ kaum explizit darstellbar; praktisch ist man zur Benützung der hypsometrischen Funktion $F(z)$ gezwungen, die durch Ausplanimetrieren der Höhenschichten bestimmt wird.

Somit ist auch

$$V = \int^{z'} F(z) dz \quad (1.3)$$

und

$$z_m = \frac{V}{F_0} = \int \frac{z' F(z) dz}{F_0} \quad (1.4)$$

wo z' = maximale Niveaudifferenz. Nun kann die hypsometrische Funktion $F(z)$ als Summenhäufigkeitsverteilung sämtlicher Kotenwerte aufgefaßt werden; die entsprechende Kotenhäufigkeitsverteilung ist gleich $f(z) = dF(z)/dz$. Wird nun die hypsometrische Funktion auf die Grundfläche eins reduziert, und die maximale Niveaudifferenz z' gleich eins gesetzt, d. h. $u = z/z'$ und $F(u) = F(z)/F_0$, so erfüllt $f(u) = dF(u)/du$ die Bedingung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dazu muß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1 \text{ sein.}$$

$f(u)$ ist aber nur im Einheitsintervall definiert; d. h.

Funktion $f(u)$ bestimmbar ist; das p — te Moment m_p ist durch

$$m_p = \int_0^1 u^p f(u) \, du \quad (1.7)$$

gegeben. Die einfachste funktionale Darstellung der hypsometrischen Kurve ist als Polynom

$$F(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_k u^k + \dots + a_n u^n = \sum_{k=0}^n a_k u^k \quad (1.8)$$

$$\text{Daraus folgt auch } f(u) = a_1 + \sum_{k=2}^n ka_k u^{k-1} \quad (1.9)$$

Aus (1.6) und (1.9) folgt somit

$$\int_0^1 (a_1 + \sum_{k=2}^n ka_k u^{k-1}) du = 1 \quad (1.10)$$

$$\text{d. h. } \sum a_k u^k \Big|_0^1 = 1$$

und somit haben die Polynomkonstanten die Bedingung

$$\sum_{k=0}^n a_k = 1 \quad (1.11)$$

zu erfüllen. Die mittlere Kote z_m ist somit durch das erste Moment m_1 , die Kotenstreuung σ durch das zweite zentrale Moment μ_2 und die Schiefe S durch das dritte absolute Moment α_3 gegeben. Die Herleitung der Formeln (1.12—1.16) ist in Anhang A ausführlich dargestellt.

$$z_m = z_0 + z m_1 \quad (1.12)$$

$$= z_0 + z' \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} a_k \right) \quad (1.13)$$

$$\sigma = z' \sqrt{(m_2 - m_1^2)} \quad (1.14)$$

$$= z' \sqrt{\left(\sum_{k=2}^n \frac{k}{k+2} a_k - m_1^2 \right)} \quad (1.15)$$

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+3} \frac{a_k - 3m_1 m_2 + 2m_1^3}{\sigma^3} \quad (1.16)$$

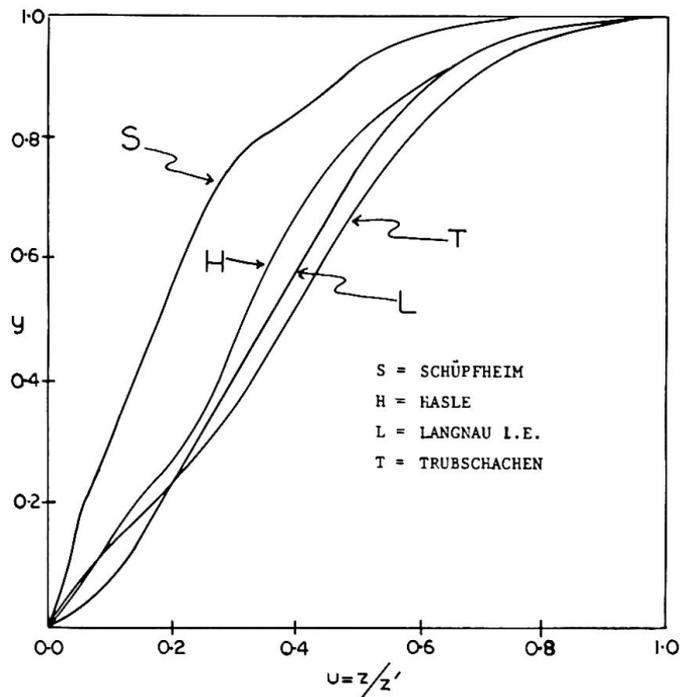
2. Die Bestimmung des hypsometrischen Polynoms

Die Bestimmung der Polynomkoeffizienten a_k erfolgt nach dem Kleinst-Quadrat-Prinzip. Gesucht ist also ein Polynom $y_n(u)$, dessen Verlauf im Einheitsintervall die hypsometrische Kurve möglichst genau wiedergibt. Ist diese Kurve durch m Planimetermessungen (u_i, y_i) bestimmt, so ist «möglichst genau» durch folgende Bedingung erfüllt

$$S + \sum_{i=1}^m (y_n(u_i) - y_i)^2 = \text{Minimum} \quad (2.1)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=0}^n a_k u_i^k - y_i \right)^2 = \text{Minimum} \quad (2.2)$$

Die Bestimmung der a_k aus (2.2) erfolgt auf übliche Weise. Die Partialableitungen $\delta S / \delta a_k$ werden



Figur 1. Reduziert hypsometrische Kurven

gleich Null gesetzt und das resultierende System von $(n+1)$ Gleichungen in $(n+1)$ Unbekannten (a_0, a_1, \dots, a_n) durch Gauss'sche Elimination gelöst⁵. Da jedoch aus (1.11)

$$\sum_{k=0}^n a_k = 1$$

und $y_n(0) = 0$ folgt, reduziert sich das Lösungssystem eines Polynoms n -ten Grades auf $(n-1)$ Unbekannten. Die Lösung dieser Gleichungen wird in Anhang B näher diskutiert.

3. Anwendung

Die reduziert hypsometrischen Kurven für die Gemeinden Schüpfheim, Hasle, Trubschachen und Langnau i. E. sind in Figur 1 aufgezeichnet. Ein Vorteil dieser Darstellungsart ist die Möglichkeit direkter Vergleiche der allgemeinen morphologischen Entwicklung. Somit folgt z. B. aus Figur 1, wie auch durch Kenntnis der entsprechenden Landschaften bestätigt ist, daß Langnau und Trubschachen morphologisch ein relativ «reifes» Stadium darstellen⁶, während Schüpfheim sich eher dem «Monadnock»-Stadium nähert.

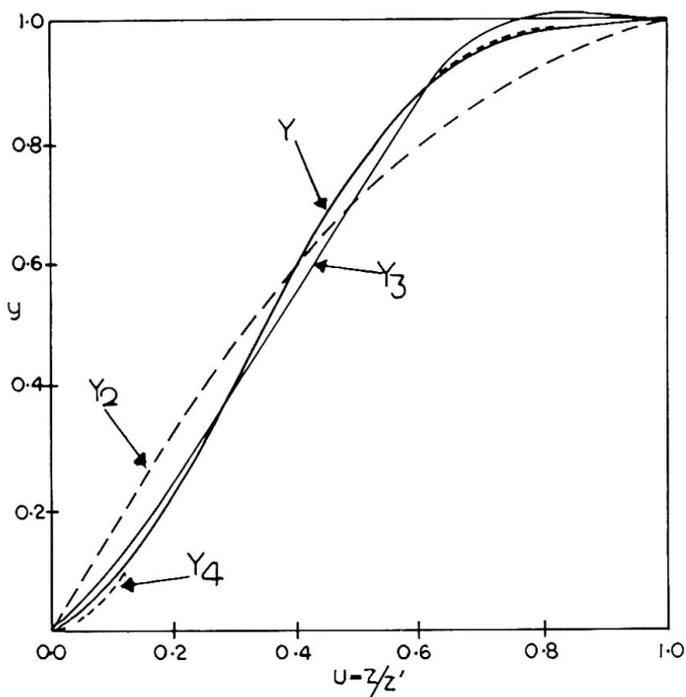
Die Polynomkonstanten und Reliefparameter sind auf Tabelle 1 gegeben⁷. Sind die Höhenschichten einmal ausplanimetriert⁸, so sind auch die Relief-

parameter innerhalb weniger Sekunden auf dem Computer erhältlich⁹.

Es ist zu beachten, daß die Kleinst-Quadrat-Annäherung nur dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt, wenn $\delta y/\delta x \geq 0$ und $y \leq 1$ für alle $0 \leq x \leq 1$. Polynome, die den Wert eins innerhalb des Einheitsintervalls überschreiten, sind auf Tabelle 1 mit * bezeichnet. In solchen Fällen haben die höheren Momente oft sinnlose Werte (Momente sind auch nur für echte Wahrscheinlichkeitsverteilungen definiert!), und man ist zur Berechnung des nächst höheren Polynoms gezwungen.

Aus Figur 2 ist ersichtlich, daß die y_4 -Polynome die hypsometrischen Kurven sehr gut approximieren; Benutzung eines y_5 -Polynoms ist wohl kaum sinnvoll. Wo eine elektronische Rechenanlage nicht vorhanden ist, reicht y_2 oder y_3 für eine Schätzung der mittleren Höhe, für eine Schätzung der Kotenstreuung jedoch nicht.

Es ist leicht zu zeigen, daß das dritte absolute Moment oder auch ein anderes Maß der Schiefe der Kotenhäufigkeitsverteilung die vorhin erwähnte unterschiedliche morphologische Entwicklung zum Ausdruck bringt¹⁰. Aus Figur 1 sollte damit die Größenordnung dieses Schiefemaßes in der Reihenfolge Schöpfheim > Hasle > Langnau > Trubschachen verlaufen; dies ist in der Tat auch durch



Figur 2. Die beobachtete hypsometrische Kurve Y der Gemeinde Langnau i. E. sowie die berechneten Polynome y_2, y_3, y_4

die S-Werte der y_4 -Polynome auf Tabelle 1 bestätigt¹¹.

Tabelle 1. Polynomkonstanten und Reliefparameter

Langnau i. E.

$$y_2 = 1,848x - 0,848x^2$$

$$y_3 = 0,914x + 2,086x^2 - 2,000x^3$$

$$y_4 = 0,220x + 6,432x^2 - 9,574x^3 + 3,922x^4$$

	z_m	σ	S
y_2	890	174	0,532
y_3 (*)	883	113	-1,613
y_4	890	126	0,237
(**)	890	134	

Hasle

$$y_2 = 2,041x - 1,041x^2$$

$$y_3 = 1,480x + 0,661x^2 - 1,141x^3$$

$$y_4 = 0,625x + 5,631x^2 - 9,510x^3 + 4,254x^4$$

	z_m	σ	S
y_2	1113	316	0,562
y_3 (*)	1110	251	im
y_4	1127	275	0,692

Schöpfheim

$$y_2 = 2,779x - 1,779x^2$$

$$y_3 = 3,553x - 4,244x^2 + 1,690x^3$$

$$y_4 = 3,471x - 3,718x^2 + 0,731x^3 + 0,514x^4$$

	z_m	σ	S
y_2 (*)	959	im	im
y_3 (*)	950	224	1,200
y_4	951	230	1,471

Trubschachen

$$y_2 = 1,667x - 0,667x^2$$

$$y_3 = 0,970x + 1,422x^2 - 1,393x^3$$

$$y_4 = 0,731x + 2,787x^2 - 3,648x^3 + 1,129x^4$$

	z_m	σ	S
y_2	922	118	0,443
y_3	922	142	0,059
y_4	920	118	0,156

(*) Siehe Text. Im Moment imaginär (Polynom keine echte Wahrscheinlichkeitsverteilung).

(**) Präzisionsplanimeterbestimmung nach Meier (1966).

Schlußwort

In der klassischen Arbeit «Kotenstreuung und Relieffaktor» hat Prof. Gutersohn schon vor 20 Jahren die Neuorientierung der Geographie in Richtung vermehrter Benützung mathematischer Methoden vorausgesehen. Daß diese Reliefparameter in der geographischen Charakterisierung der Landschaft einen nützlichen Beitrag leisten, ist auch in seinen späteren Werken klar bewiesen¹². Die Leistungsfähigkeit der modernen Computer ermöglicht rasche und zuverlässige Berechnung, und diese

quantitativen Reliefparameter sollten nun vermehrt Anwendung finden.

Der Schreibende ist vor allem Prof. Gutersohn selbst zu aufrichtigem Dank verpflichtet, nicht nur als ehemaligen Diplomand, sondern auch für das stete Interesse für die persönlichen und beruflichen Anliegen eines jungen Geographen. Gedankt sei auch Herrn Prof. J. Nebiker, Dozent an der University of Massachusetts, für die kritische Durchsicht des Manuskriptes und dem Research Computer Center für die Genehmigung zur Benützung der Rechenanlage.

Anhang A. Berechnung der Momente

Das p-te Moment m_p einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(u)$ ist gleich

$$\begin{aligned} m_p &= \int_{-\infty}^{\infty} u^p f(u) du \\ &= \int_{-\infty}^0 u^p f(u) du + \int_0^1 u^p f(u) du + \int_1^{\infty} u^p f(u) du \\ &= \int_0^1 u^p f(u) du \quad \text{da } f(u) = 0 \quad \begin{cases} 1 < u < \infty \\ -\infty < u < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

somit das erste Moment m_1

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_0^1 u(a_1 + 2a_2u + 3a_3u^2 \dots + ka_ku^{k-1} + \dots + na_nu^{n-1}) du \\ &= \left[\frac{1}{2} a_1 u^2 + \frac{2}{3} a_2 u^3 + \dots + \frac{k}{k+1} a_k u^{k+1} + \dots + \frac{n}{n+1} a_n u^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} a_k \end{aligned}$$

auf analoge Weise erhält man für m_2

$$m_2 = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+2} a_k$$

und für das p-te Moment m_p

$$m_p = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+p} a_k$$

Das dritte Moment eines y_4 -Polynomes ist z. B. gleich

$$m_3 = \frac{a_1}{4} - \frac{2a_2}{5} + \frac{3a_3}{6} - \frac{4a_4}{7}$$

Anhang B. Bestimmung der Polynome

Das Polynom 2-ten Grades $y_2(u)$ ist $y_2(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2$.
 Da $y_2(0) = 0$ muß $a_0 = 0$ sein. Aus (1.11) folgt weiter $a_1 = 1 - a_2$.
 Damit wird die Kleinst-Quadrat-Bedingung (2.2) gleich

$$S = \sum_{i=1}^m \left\{ (1 - a_2)u_i + a_2u_i^2 - y_i \right\}^2 = \text{minimum}$$

nach etwelcher Umformung erhält man

$$\frac{\delta S}{\delta a_2} = \sum_{i=1}^m \left\{ a_2(x_i^2 - 2x_i^3 + x_i^4) + x_i^3 - x_i^2 - x_i y_i - x_i^2 y_i \right\}$$

und
$$a_2 = \frac{\sum x_i^2 y_i - \sum x_i y_i + \sum x_i^2 - \sum x_i^3}{(\sum x_i^2 - \sum 2x_i^3 + \sum x_i^4)}$$

Für ein Polynom n-ten Grades ist das Gleichungssystem gleich

$$Xa = P$$

mit dem Lösungsvektor

$$a = X^{-1}P$$

wo $a_i = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} \sum x^2 - \sum x^3 + \sum x^2 y - \sum xy \\ \sum x^2 - \sum x^4 + \sum x^3 y - \sum xy \\ \sum x^2 - \sum x^5 + \sum x^4 y - \sum xy \\ \vdots \\ \sum x^2 - \sum x^{n+1} + \sum x^n y - \sum xy \end{bmatrix}$

und $X = \begin{bmatrix} (2, -3^1, 4) & (2, -3, -4, 5) & (2, -3, -5, 6) & \dots & (2, -3, -(n+1), n+2) \\ & (2, -4^1, 6) & (2, -4, -5, 7) & \dots & (2, -4, -(n+1), n+3) \\ & & (2, -5^1, 8) & & (2, -5, -(n+1), n+4) \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & (2, -n^1, 2n) & (2, -n, -(n+1), 2n) \\ & & & & & (2, -(n+1)^1, 2n) \end{bmatrix}$

Symmetrisch

wo z. B. $(2, -3, -5, 6) \equiv \sum_{i=1}^n x^2 - \sum_{i=1}^n x^3 - \sum_{i=1}^n x^5 + \sum_{i=1}^n x^6$

und $(2, -4^1, 6) \equiv \sum_{i=1}^n x^2 - 2 \sum_{i=1}^n x^4 + \sum_{i=1}^n x^6$

Literatur

Gassmann, F. und Gutersohn, H. (1947). Knotenstreuung und Relieffaktor. Geogr. Helv. 2, 122—139.
 Haggett, P. (1966). Locational Analysis in Human Geography. Arnold, London.
 McCracken, D. und Dorn, W. S. (1964). Numerical Methods and Fortran Programming. John Wiley, New York.

Strahler, A. (1954). Statistical Analysis in Geomorphic Research *J. Geol.* 62, 1—125.
Meier, P. (1966). Applications of Mathematics to Regional Planning and Geography. Diplomarbeit, Manuskript am Geogr. Inst. ETH, Zürich.
Steiner, D. (1965). Die Faktoranalyse — ein modernes statistisches Hilfsmittel des Geographen für die objektive Raumgliederung und Typenbildung. *Geogr. Helv.* 20, 20—34.

Bemerkungen

¹ Gassmann und Gutersohn (1947). Knotenstreuung und Relieffaktor. *Geogr. Helv.*, 2, 122—139.
² Siehe dazu Steiner (1966).
³ Gleichungen (1.1) — (1.4) sind in Gassmann und Gutersohn (1947) näher begründet.
⁴ Siehe Abschnitt 3.
⁵ Siehe dazu etwa McCracken und Dorn (1964), Kapitel 8.
⁶ Strahler (1954) unterscheidet zwischen «jung», «reif» und «Monadnock», je nach Geometrie der reduziert hypsometrischen Kurve.
⁷ Sämtliche Berechnungen wurden auf der digitalen Rechenanlage der University of Massachusetts

durchgeführt (Control Data Corporation 3600) mit Zugang mittels Fernschreiber (sogenanntes remote access timesharing system).

⁸ Zu Erleichterung der Arbeit wurden die Höhenkurven auf Transparentpapier aufgezeichnet, die Höhenschichten ausgeschnitten, auf einer Mettlerwaage gewogen und die Bestimmungspunkte der reduzierten hypsometrischen Kurve durch entsprechende Division berechnet.

⁹ Die durchschnittliche Berechnungszeit für das y_2 -Polynom betrug 0,5 sec, für das y_3 -Polynom 0,6 sec und für y_4 0,7 sec (einschließlich Berechnung der Reliefparameter). Zwischen Anfang der Dateneingabe auf dem Fernschreiber und Ende des Resultatausschreibens (Polynomkonstanten, Reliefparameter und Verlauf des Polynoms im Einheitsintervall) verlaufen etwa 20—40 Sekunden!

¹⁰ Die Strahlersche Stufe «jung» entspricht einer rechtsschiefen, «reif» einer symmetrischen und «Monadnock» einer linksschiefen Knotenhäufigkeitsverteilung. Siehe dazu auch Meier (1966).

¹¹ Kopien des Fortran-Programmes für die Berechnung sind von Peter Meier, Departement of Civil Engineering, University of Massachusetts, Amherst, Mass. 01002, USA, erhältlich.

¹² Besonders in dem mehrbändigen Werk «Geographie der Schweiz».